Ejercicio 3. Comprobar que los polinomios $\{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ son linealmente independientes en $P_2(\mathbb{R})$.

Para estudiar la dependencia lineal de estos polinomios, usamos la definición, es decir, escribimos una combinación lineal de estos vectores, la igualamos a cero y vemos si es posible que los escalares sean no todos nulos:

$$\alpha(x^2+1) + \beta(x-2) + \gamma(x^2+x) = 0$$

Operando y agrupando

$$(\alpha+\gamma)x^2 + (\beta+\gamma)x + (\alpha-2\beta) = 0$$

Sabemos que dos polinomios son iguales si y sólo si coinciden termino a termino:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

Ahora sólo tenemos que discutir el sistema, estudiando el rango de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es 3, luego el sistema es compatible determinado, tiene una única solución: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por tanto, estos polinomios son linealmente independientes.

Ejercicio 5. Comprobar que los polinomios $\{x^2+1,\ x-2,\ x^2+x\}$ constituyen un sistema generador del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$.

Para resolver este ejercicio también usamos la definición, es decir, tenemos que probar que cualquier polinomio de $P_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como combinación lineal de los tres polinomios del conjunto. Para ello tomamos un polinomio arbitrario en $P_2(\mathbb{R})$, por ejemplo: ax^2+bx+c, y lo escribimos como combinación lineal de los tres polinomios del conjunto:

$$\alpha(x^2+1)+\beta(x-2)+\gamma(x^2+x)=ax^2+bx+c$$

Operando y agrupando

$$(\alpha+\gamma)x^2+(\beta+\gamma)x+(\alpha-2\beta)=ax^2+bx+c$$

Igualamos ambos polinomios

Ahora sólo tenemos que ver si existe valores de α, β, y γ que satisfaga la ecuación anterior.

$$\begin{cases} \alpha \quad\quad + \gamma = a \\ \quad\quad \beta + \gamma = b \\ \alpha - 2\beta \quad\quad = c \end{cases}$$

En el ejercicio 3 vimos que el rango de esta matriz de coeficientes es 3, igual que el de la matriz ampliada (es una matriz 3×4 y no puede ser mayor), así que el sistema anterior es compatible y determinado, tiene una única solución, y por tanto, existen valores de α, β y γ que permiten escribir cualquier polinomio del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ como combinación lineal de los tres vectores de este conjunto. Por tanto, estos polinomios forman un sistema generador de $P_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 7. Deducir que el conjunto $\{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ es una base del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$.

Es consecuencia del ejercicio 3 donde demostramos que es un sistema linealmente independiente y del ejercicio 5 donde probamos que es un sistema generador. Por tanto, es una base de $P_2(\mathbb{R})$.